

Berechnung der aerodynamischen Beiwerte von Tragflügeln endlicher Spannweite in Bodennähe

Gersten, Klaus

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960,
S.95-115



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Berechnung der aerodynamischen Beiwerte von Tragflügeln endlicher Spannweite in Bodennähe*)

Von Klaus Gersten

Vorgelegt von Herrn H. Schlichting

(Eingegangen am 7. 7. 1960)

Summary: The well-known methods for calculating the lift distribution on wings of finite aspect ratio in an unbounded flow field are extended for wings near the ground. The ground effect is taken into account by the reflection method. The vortex models used till now in the wing theories require a restriction to small angles of attack (linear theory). Approaching to the ground the lift increases for a constant angle of attack as well as for a constant flap angle, the induced drag, however, decreases at constant lift. The aerodynamic centre is displaced backwards (stabilizing). By means of calculated examples the dependence of the ground effect on the height above ground, the aspect ratio and the angle of sweep is determined.

Übersicht: Die bekannten Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln endlicher Spannweite im unbegrenzten Raum werden auf Tragflügel in Bodennähe erweitert. Dabei wird der Bodeneinfluß durch das Spiegelungsprinzip erfaßt. Die bisher in der Tragflügeltheorie benutzten Wirbelmodelle erfordern die Beschränkung auf kleine Anstellwinkel (lineare Theorie). Bei Annäherung an den Boden nimmt der Auftrieb sowohl bei festem Anstellwinkel als auch bei festem Klappenwinkel zu, der induzierte Widerstand bei festem Auftrieb nimmt dagegen ab. Der aerodynamische Neutralpunkt rückt nach hinten (stabilisierend). An Hand von Beispielrechnungen wird der Einfluß von Bodenabstand, Seitenverhältnis und Pfeilung auf den Bodeneffekt ermittelt.

1. Einleitung

Die aerodynamischen Eigenschaften eines Flugzeuges in Bodennähe, z. B. bei Start und Landung, sind anders als im unbegrenzten Raum. Bei Annäherung an den Boden ändern sich im symmetrischen Flug daher Auftrieb, Widerstand, Kippmoment, Maximalauftrieb, Nullanstellwinkel, Profilwiderstand usw.

In zahlreichen experimentellen und theoretischen Arbeiten ist dieser Bodeneinfluß eingehend untersucht worden [2] bis [12]. Theoretisch ist vor allem der Flügel mit unendlicher Spannweite behandelt worden, da hier mittels der konformen Abbildung exakte Lösungen gewonnen werden können [4], [6], [7]. Dabei hat sich z. B. für die ebene Platte [5] ergeben, daß mit Annäherung an den Boden bei kleinen Anstellwinkeln der Auftrieb zunimmt, für große Anstellwinkel dagegen abnimmt. Abb. 1 zeigt den exakten Verlauf des Auftriebsbeiwertes c_A über dem Anstellwinkel α für die angestellte ebene Platte bei den Bodenabständen $h/l = 1/3$ und $h = \infty$. Überschreitet man den Anstellwinkel

*) Aus dem Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig.

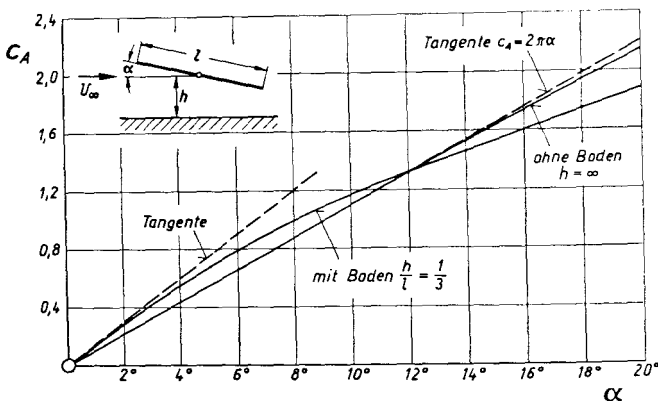


Bild 1. Auftriebsbeiwert der ebenen Platte mit unendlicher Spannweite in Abhängigkeit vom Anstellwinkel ohne Boden und beim Bodenabstand $h/l = 1/3$. (Exakte Lösung mittels konformer Abbildung nach [4].)

von etwa $\alpha = 12^\circ$, so geht der günstige Bodeneinfluß (Auftriebserhöhung) in einen ungünstigen über. Ferner ist deutlich zu erkennen, daß in Bodennähe der Verlauf c_A über α nicht mehr durch eine lineare Funktion ersetzt werden kann, wie das bei unendlichen Bodenabständen immer möglich ist. Beschränkt man sich jedoch auf den Bereich sehr kleiner Anstellwinkel, dann kann festgestellt werden, daß durch die Bodennähe der Auftriebsanstieg eines Tragflügels unendlicher Spannweite zunimmt.

Für die Berechnung der aerodynamischen Beiwerte eines Tragflügels endlicher Spannweite muß der Tragflügel durch ein geeignetes Wirbelmodell dargestellt werden. Alle bisherigen Methoden zur Auftriebsberechnung sind sogenannte lineare Theorien, d. h. sie benutzen ebene Wirbelschichten zur Darstellung der Tragflügelströmung. Die beim Tragflügel endlicher Spannweite von der Flügelhinterkante abgehenden freien Wirbel liegen daher in der Verlängerung der Flügelsebene. Daraus folgt, daß beim Flügel in Bodennähe die Anwendung aller bekannten Berechnungsmethoden zwangsläufig eine Beschränkung auf sehr kleine Anstellwinkel erfordert. Wie in Abb. 2 angedeutet, wird der Flügel durch eine Wirbelschicht mit gebundenen und freien Wirbeln ersetzt, die parallel zur Bodenebene angenommen wird. Die Höhe des Flügels und damit der Wirbelschicht wird durch den Abstand h des geometrischen Neutralpunktes N_{25} vom Boden gekennzeichnet.

Der Einfluß des Bodens wird in der Theorie dadurch erfaßt, daß seine Wirkung durch ein an der Bodenebene erzeugtes Spiegelbild des Flügels ersetzt wird. Der betrachtete Flügel befindet sich dann in einem von dem gespiegelten Flügel herrührenden Feld von induzierten Geschwindigkeiten, welches die Änderungen der aerodynamischen Beiwerte hervorruft.

Während für den Tragflügel unendlicher Spannweite zahlreiche theoretische Arbeiten vorliegen, z. B. [4], [6], [7], ist der Tragflügel endlicher Spannweite theoretisch bisher noch wenig behandelt worden. C. Wieselsberger [2] gab be-

reits 1923 eine einfache Abschätzung für den induzierten Widerstand in Bodennähe. Die Arbeiten von *I. Tani* und seinen Mitarbeitern [5] sowie von *R. M. Licher* [9] gestatten auch die Ermittlung des Auftriebsanstieges. Erst die Arbeit von *F. Thomas* [11] jedoch gestattete eine Berechnung von Flügeln beliebigen Grundrisses, also auch von gepfeilten Flügeln, und lieferte auch eine Auftriebsverteilung längs Spannweite. Der Arbeit von *F. Thomas* liegt das erweiterte Traglinienverfahren [13] zugrunde, das keine Aussage über das Kippverhalten und damit über die Lage des aerodynamischen Neutralpunktes liefert.

Im folgenden wird gezeigt, in welcher Weise die bekannten Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln erweitert werden können, um auch den Einfluß der Bodennähe auf die aerodynamischen Beiwerte des Tragflügels zu erfassen. Systematische Beispielrechnungen an Rechteck-, Pfeil- und Deltaflügeln sollen den Einfluß des Bodenabstandes, des Seitenverhältnisses und der Pfeilung auf den Bodeneffekt zeigen. Bei Benutzung des Tragflächenverfahrens kann auch die Lage des aerodynamischen Neutralpunktes sowie der Klappenwirksamkeit bei Klappenflügeln in Abhängigkeit vom Bodenabstand theoretisch ermittelt werden. In allen Fällen wird dabei nur der Bereich sehr kleiner Anstell- bzw. Klappenwinkel betrachtet.

2. Methoden zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln in Bodennähe

2.1 Einfache Traglinientheorie

Die von *L. Prandtl* [1] entwickelte einfache Traglinientheorie ist nur für ungepfeilte Flügel mit größeren Seitenverhältnissen ($\lambda = b^2/F > 3$) anwendbar. Bei ihr wird der Flügel durch einen gebundenen Wirbel auf der $l/4$ -Linie des Flügels ersetzt, von der entsprechend der Änderung der Zirkulation längs

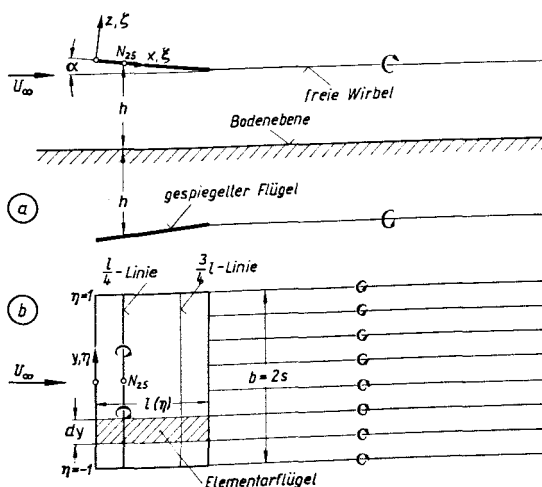


Bild 2. Erläuterungsskizze zu den Bezeichnungen am Tragflügel in Bodennähe.

Ⓐ Seitenansicht Ⓑ Grundriß

Spannweite η nach hinten freie Wirbel abgehen. Diese freien Wirbel induzieren auf der $l/4$ -Linie Abwärtsgeschwindigkeiten $w_i(\eta)$, so daß an der $l/4$ -Linie statt des Anstellwinkels α nur der etwas kleinere effektive Anstellwinkel $\alpha_e(\eta) = \alpha - \alpha_i(\eta)$ herrscht, wobei $\alpha_i(\eta) = -w_i/U_\infty$ der induzierte Abwindwinkel genannt wird. Den Tragflügel denkt man sich dann nach Abb. 2 in viele Elementarflügel der Breite $d\eta$ längs Spannweite aufgeteilt, von denen jeder als ein Stück eines Tragflügels unendlicher Spannweite unter dem jeweiligen Anstellwinkel $\alpha_e(\eta)$ aufgefaßt wird. Entscheidend für die Auftriebsverteilung ist also nur die Verteilung des effektiven Anstellwinkels an der $l/4$ -Linie. Für den Flügel ohne Boden ergibt sich dann zur Bestimmung der dimensionslosen Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta) = \Gamma/U_\infty b = c_a l/2b$ als Funktion der dimensionslosen Spannweitenkoordinate $\eta = y/s$ die bekannte Prandtlsche Integralgleichung:

$$\alpha_e(\eta) = \frac{c_a}{2\pi} = \frac{b}{\pi l} \gamma(\eta) = \alpha - \alpha_i(\eta, 0). \quad (1)$$

Dabei ist $\alpha_i(\eta, 0) = -w_i(\eta)/U_\infty$ das in Gl. (8) definierte Abwindintegral.

Beim Flügel in Bodennähe müssen bei der Berechnung des effektiven Anstellwinkels α_e auch noch die vom gespiegelten Flügel induzierten Geschwindigkeiten u_{is} und w_{is} berücksichtigt werden. Es gilt daher

$$\alpha_e = \frac{\alpha U_\infty + w_i + w_{is}}{U_\infty + u_{is}} \quad (3)$$

oder

$$\alpha_e = \alpha + \frac{w_i}{U_\infty} + \frac{w_{is}}{U_\infty} - \alpha_e \frac{u_{is}}{U_\infty}. \quad (4)$$

Da sowohl α_e als auch u_{is}/U_∞ linear von $\gamma(\eta)$ abhängen und daher im Rahmen der linearen Theorie proportional zu α sind, ist das letzte Glied in Gl. (4) proportional zu α^2 und kann bei Beschränkung auf kleine Anstellwinkel vernachlässigt werden. Zur Bestimmung des Bodeneinflusses brauchen also in linearer Theorie nur die Vertikalkomponenten der induzierten Geschwindigkeiten berücksichtigt zu werden.

Geht man zum Flügel mit sehr großem Seitenverhältnis ($\Lambda \rightarrow \infty$) über, so ergibt sich schließlich eine konstante Zirkulationsverteilung längs Spannweite ohne freie Wirbel. Dann verschwinden die induzierten Geschwindigkeiten w_i und w_{is} , und es ergibt sich nach Gl. (4) $\alpha_e = \alpha$ für alle Bodenabstände. Im Gegensatz zu den exakten Lösungen (vgl. Abb. 1) liefert die einfache Traglinientheorie für den Tragflügel unendlicher Spannweite *keinen* Bodeneinfluß.

Die einfache Traglinientheorie mit der Vorstellung, daß sich jeder Flügelschnitt wie ein Stück eines Flügels unendlicher Spannweite verhält, der sich im von den übrigen Flügelschnitten und evtl. gespiegelten Flügelschnitten induzierten Strömungsfeld, charakterisiert durch den effektiven Anstellwinkel im $l/4$ -Punkt, befindet, versagt für den Tragflügel in Bodennähe.

Der Grund für dieses Versagen ist darin zu suchen, daß die einzelnen elementaren Flügelschnitte sich nicht in einer Parallelströmung befinden. Die Nachbarschnitte und vor allem der gespiegelte Flügel induzieren Geschwindigkeiten,

die eine längs Profiltiefe veränderliche örtliche Anstellwinkelverteilung erzeugen. Der Flügelschnitt befindet sich daher in einer gekrümmten Strömung. Will man diese Anstellwinkelverteilung durch einen mittleren Anstellwinkel ersetzen, so ist dafür bekanntlich [1] der örtliche Anstellwinkel im $3/4$ l -Punkt ($3/4$ l -Theorem von *Pistolesi*) am besten geeignet, nicht dagegen der im $l/4$ -Punkt. Für den Flügel ohne Boden befindet sich der Flügelschnitt praktisch in einer Parallelströmung, so daß mit dem Anstellwinkel in einem beliebigen Punkt, also auch im $l/4$ -Punkt, gerechnet werden darf. Nähert man sich dem Boden, dann muß man jedoch wegen der gekrümmten Strömung für den betreffenden Flügelschnitt als mittleren Anstellwinkel den örtlichen Anstellwinkel im $3/4$ l -Punkt wählen. Das aber ist gleichbedeutend mit einem Übergang auf die erweiterte Traglinientheorie.

2.2 Erweiterte Traglinientheorie

Auf der $l/4$ -Linie (vgl. Abb. 2) des Tragflügels, der im Gegensatz zur einfachen Traglinientheorie beliebige Grundrißformen besitzen darf, wird ein gebundener Wirbel mit längs Spannweite veränderlicher Zirkulation γ (η) angebracht, von dem entsprechend der Zirkulationsänderung $d\gamma/d\eta$ freie Wirbel nach hinten abgehen. Entsprechend dem Theorem von *Pistolesi* wird nun die Zirkulationsverteilung γ (η) so bestimmt, daß das beschriebene Wirbelmodell auf der $3/4$ l -Linie gerade die dort vorliegenden örtlichen Anstellwinkel induziert. Es gilt also die Bedingung

$$\alpha_{75}(\eta) = \alpha_{w75}(\eta) + \alpha_{ws75}(\eta) \quad , \quad (5)$$

wobei $\alpha_{w75}(\eta)$ die vom gegebenen Flügel und $\alpha_{ws75}(\eta)$ die vom gespiegelten Flügel induzierten Abwindwinkel auf der $3/4$ l -Linie sind. In [14] wurde ein einfaches Verfahren zur Berechnung dieser Abwindwinkel bei beliebiger Flügelform und beliebiger Zirkulationsverteilung angegeben. Dieses Verfahren wurde in [11] zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Flügeln in Bodennähe nach der erweiterten Traglinientheorie angewendet. Es ergibt sich für die beiden Abwindwinkel:

$$\alpha_{w,5}(\eta) = 2\alpha_i(\eta, 0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') K(\eta', \zeta = 0) d\eta' \quad (6)$$

und

$$\alpha_{ws,5}(\eta) = -2\alpha_i\left(\eta, \frac{2h}{s}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') K\left(\eta', \zeta = \frac{2h}{s}\right) d\eta'. \quad (7)$$

Dabei gilt:

$$\alpha_i(\eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') \frac{(\eta - \eta')^2 - \zeta^2}{[(\eta - \eta')^2 + \zeta^2]^2} d\eta'. \quad (8)$$

Für dieses Integral wurde in [14] eine einfache Quadraturformel der Form

$$\alpha_i(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^m a_n(\eta, \zeta) \gamma_n \quad (9)$$

entwickelt. Die $a_n(\eta, \zeta)$ sind universelle Koeffizienten, die für $m = 7$ und eine große Anzahl von Punkten $P(\eta, \zeta)$ in [14] tabuliert sind. Ferner sind γ_n die Funktionswerte der Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$ an den m Stellen $\eta_n = \cos \vartheta_n = \cos \frac{n\pi}{m+1}$ ($n = 1, 2, \dots, m$).

Die Einflußfunktionen $K(\eta', \zeta)$ sind überall regulär und hängen nur von der Grundrißgeometrie des Flügels und dem Bodenabstand $h/s = \zeta/2$ ab. Am zweckmäßigsten werden sie auf graphischem Wege [14] ermittelt. Benutzt man zur Auswertung der Integrale über die Einflußfunktionen die bekannte Quadraturformel

$$\int_{-1}^{+1} f(\eta') d\eta' = \frac{\pi}{m+1} \sum_{n=1}^m f_n \sin \vartheta_n, \quad (10)$$

so erhält man für die induzierten Abwindwinkel in Gl. (6) und (7) Summenformeln der Form

$$\alpha_w \sim \sum_{n=1}^m \left[2 a_n(\eta, \zeta) + \frac{1}{2(m+1)} K_n \sin \vartheta_n \right] \gamma_n, \quad (11)$$

wobei K_n die Werte der Einflußfunktionen an den Stellen $\eta'_n = \cos \frac{n\pi}{m+1}$ sind.

Aus der kinematischen Strömungsbedingung erhält man dann das folgende lineare Gleichungssystem für die m Werte γ_n der Zirkulationsverteilung:

$$\boxed{\alpha_{75}(\eta_v) = 2 \sum_{n=1}^m \left\{ a_n(\eta_v, \zeta = 0) - a_n\left(\eta_v, \zeta = \frac{2h}{s}\right) + \frac{\sin \vartheta_n}{4(m+1)} \left[K_n(\eta_v, \zeta = 0) - K_n\left(\eta_v, \zeta = \frac{2h}{s}\right) \right] \right\} \gamma_n} \quad (12)$$

($v = 1, 2, \dots, m$)

Aus den errechneten γ_n -Werten erhält man dann unter Beschränkung auf kleine Anstellwinkel den Auftriebsbeiwert c_A zu

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 F} = A \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') d\eta' = \frac{\pi A}{m+1} \sum_{n=1}^m \gamma_n \sin \vartheta_n. \quad (13)$$

Das beschriebene Rechenverfahren wurde in [11] durch Beispielrechnungen erprobt. Die theoretischen Ergebnisse zeigen sehr gute Übereinstimmung mit Messungen. Auch im Grenzfall unendlich großer Spannweite erhält man zufriedenstellende Ergebnisse.

Abb. 3 zeigt für den Auftriebsanstieg $c'_A = dc_A/d\alpha$ der angestellten Platte unendlicher Spannweite in Bodennähe einen Vergleich zwischen der Näherungslösung nach dem $3/4 l$ -Theorem und der exakten Lösung mittels der konformen Abbildung. Mit Annäherung an den Boden werden naturgemäß die Abweichungen immer größer.

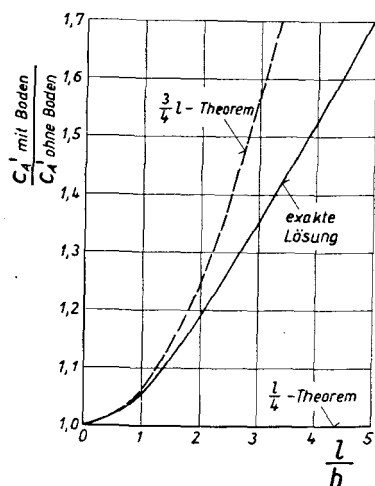


Bild 3.

Verhältnis der Auftriebsanstiege $c'_{A \text{ m. B.}} / c'_{A \text{ o. B.}}$ der ebenen Platte mit unendlicher Spannweite in Abhängigkeit vom reziproken Bodenabstand l/h . Vergleich zwischen exakter Lösung und Näherungslösung nach dem $3/4 l$ -Theorem [9]. Für die Näherungslösung gilt:

$$c'_{A \text{ m. B.}} / c'_{A \text{ o. B.}} = \frac{1 + \left(4 \frac{h}{l}\right)^2}{\left(4 \frac{h}{l}\right)^2}$$

2.3 Tragflächentheorie

Für eine genauere Berechnung der Auftriebsverteilung und insbesondere für die Berechnung des aerodynamischen Neutralpunktes muß man das wesentlich kompliziertere Tragflächenverfahren verwenden. Dabei wird die Flügelfläche ($\zeta = 0$) kontinuierlich mit der Wirbeldichte $k(\xi', \eta')$ belegt. Diese Wirbelschicht zusammen mit den dazugehörigen freien Wirbeln, die von der Hinterkante des Flügels abgehen, müssen nun am Flügel gerade solche Abwindwinkel induzieren, die den örtlichen Anstellwinkeln entsprechen (kinematische Strömungsbedingung). Nach dem Tragflächenverfahren von E. Truckenbrodt [15] wird für die Wirbelverteilung der folgende Ansatz gewählt:

$$k(\varphi, \vartheta) = \frac{2bU_\infty}{\pi l(\vartheta)} \left[\gamma(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 4\mu(\vartheta) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) \right] \quad (14)$$

mit

$$(1 - \cos \varphi) = (\xi' - \xi_0) \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad \cos \vartheta = \eta'.$$

Dabei bezieht sich der Index v auf die Vorderkante. Die Verteilung der Wirbeldichte in Tiefenrichtung für einen festen Flügelschnitt $\eta' = \text{const.}$ entspricht den beiden ersten Birnbaumschen Normalverteilungen. Die Stärke der jeweiligen Tiefenverteilung ändert sich längs der Spannweite. Sie wird durch die Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta')$ bzw. die Momentenverteilung $\mu(\eta')$ bestimmt. Statt der kontinuierlichen Verteilung $k(\xi', \eta')$ werden nur noch die beiden Funktionen $\gamma(\eta')$ und $\mu(\eta')$ gesucht. Die kinematische Strömungsbedingung

kann daher auch nur in zwei Punkten eines jeden Schnittes erfüllt werden, wo für *E. Truckenbrodt* die Punkte auf der Hinterkante (durch einen Stern gekennzeichnet) und der $l/4$ -Linie (durch zwei Sterne gekennzeichnet) gewählt hat. Für den Tragflügel ohne Boden erhält man dann nach [15] das folgende Gleichungssystem für die $2m$ Unbekannten γ_n und μ_n ($v = 1, 2, \dots, m$).

$$a_{vv} \alpha_v^* = \left[2 + b_v \left(\frac{s}{l_v} \right)^{3/2} \right] \gamma_v - \sum_{n=1}^m ' a_{vn} i_{vn}^* \gamma_n - \quad (15)$$

$$- 12 b_v \left(\frac{s}{l_v} \right)^{3/2} \mu_v - \sum_{n=1}^m ' a_{vn} j_{vn}^* \mu_n$$

$$a_{vv} \alpha_v^{**} = \left[1,2180 + c_v \left(\frac{s}{l_v} \right)^2 \right] \gamma_v - \sum_{n=1}^m ' a_{vn} i_{vn}^{**} \gamma_n - \quad (16)$$

$$+ \left[3,3006 + 6 c_v \left(\frac{s}{l_v} \right)^2 \right] \mu_v - \sum_{n=1}^m ' a_{vn} j_{vn}^{**} \mu_n .$$

$$(v = 1, 2, \dots, m)$$

Dabei sind die a_{vn} , a_{vv} , b_v , c_v universelle, in [15] tabulierte Konstante. Die γ_n , μ_n , γ_v , μ_v sind die Funktionswerte an den Stellen $\eta_n = \cos \frac{n\pi}{m+1}$ bzw.

$\eta_v = \cos \frac{v\pi}{m+1}$. Die Zahlen l_v sind die Flügeltiefen an den Stellen η_v . Weiterhin bezeichnet m die Anzahl der gewählten Elementarflügel längs der Spannweite. Die i_{vn}^* , i_{vn}^{**} , j_{vn}^* und j_{vn}^{**} sind Einflußfunktionen, die nur von der Flügelgeometrie abhängen und sich einfach auf graphischem Wege bestimmen lassen [15]. Der Strich am Summenzeichen deutet darauf hin, daß bei der Summation das v -te Glied auszulassen ist. Für den Flügel in Bodennähe gelten dieselben Gleichungen, lediglich die örtlichen Anstellwinkel α_v^* und α_v^{**} müssen durch die Winkel $\alpha_v^* - \alpha_{vs}^*$ und $\alpha_v^{**} - \alpha_{vs}^{**}$ ersetzt werden infolge der vom gespiegelten Flügel induzierten Abwindwinkel.

Eine Methode zur Berechnung der von einer tragenden Fläche induzierten Geschwindigkeiten ist in [14] angegeben worden. Die Rechnung ist jedoch sehr aufwendig. Schließt man extrem kleine Bodenabstände aus, dann kann man statt der komplizierten Berechnung nach dem Tragflächenverfahren die vom gespiegelten Flügel induzierten Geschwindigkeiten nach dem einfachen Traglinienverfahren berechnen. Man ersetzt dazu den gespiegelten Flügel durch eine einzige tragende Linie auf der $l/4$ -Linie, die mit derselben Zirkulationsverteilung versehen ist, die der kontinuierlichen Wirbelverteilung auf dem gegebenen Flügel entspricht. Wie in [14], z. B. Abb. 12, gezeigt wird, ist dieser Ersatz der tragenden Fläche durch eine einzelne tragende Linie eine sehr gute Näherung, wenn für einen Flügel mit mittlerem Seitenverhältnis der Bodenabstand etwa $h > b/8$ ist, was in der Praxis stets erfüllt ist. Demnach lassen sich die induzierten Geschwindigkeiten des gespiegelten Flügels aus Gl. (7) ermitteln. Der Unter-

schied zwischen den Abwindwinkeln auf der $l/4$ -Linie und der Hinterkante ergibt sich nur aus den unterschiedlichen Werten der Einflußfunktion $K(\eta', \zeta)$. Man erhält dann für die linken Seiten des Gleichungssystems Gl. (15) und (16):

$$a_{rv} \left[\alpha_v^* + 2 \sum_{n=1}^m a_n \left(\eta, \zeta = \frac{2h}{s} \right) \gamma_n + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') K^* \left(\eta', \zeta = \frac{2h}{s} \right) d\eta' \right] \quad (17)$$

$$a_{rv} \left[\alpha_v^{**} + 2 \sum_{n=1}^m a_n \left(\eta, \zeta = \frac{2h}{s} \right) \gamma_n + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') K^{**} \left(\eta', \zeta = \frac{2h}{s} \right) d\eta' \right] \quad (18)$$

Die rechten Seiten bleiben unverändert. Man erhält wieder ein lineares Gleichungssystem für die $2m$ Unbekannten γ_n und μ_n . Sind diese Werte gefunden, so ergeben sich daraus der Auftriebsbeiwert nach Gl. (13) und der Kippmomentbeiwert um die Flügelnahe zu

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 F l_\mu} = -A \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') \frac{x_{25}(\eta')}{l_\mu} d\eta' + A \int_{-1}^{+1} \mu(\eta') \frac{l(\eta')}{l_\mu} d\eta' \quad (19)$$

mit

$$l_\mu = \frac{bA}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{l}{b} \right)^2 d\eta',$$

wobei zur Auswertung der Integrale wieder die Summenformel Gl. (10) benutzt werden kann.

2.4 Theorie schlanker Flügel

Betrachtet man Tragflügel von sehr kleinem Seitenverhältnis ($A < 1$), dann wird der Abstand zwischen der $l/4$ -Linie und der $3/4$ l -Linie sehr groß gegenüber der Flügelspannweite. Für die Berechnung nach der erweiterten Traglinientheorie, Gl. (12), folgt daraus, daß die Funktionen K_n gegen Null streben. Das Gleichungssystem reduziert sich daher auf die einfache Form:

$$\alpha(\eta_r) = 2 \sum_{n=1}^m \left[a_n(\eta_r, \zeta = 0) - a_n \left(\eta_r, \zeta = \frac{2h}{s} \right) \right] \gamma_n \quad (20)$$

($A \rightarrow 0$)

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man in der Tragflächentheorie den Grenzwert zu kleinen Seitenverhältnissen durchführt. In Gl. (15) nehmen die i_{rv}^* den Wert 2 an, während die j_{rv}^* verschwinden. Man erhält also unter Berücksichtigung von Gl. (17)

$$a_{rv} \left[\alpha_v + 2 \sum_{n=1}^m a_n \left(\eta_r, \zeta = \frac{2h}{s} \right) \gamma_n \right] = 2 \gamma_v - 2 \sum_{n=1}^m a_{rvn} \gamma_n \quad (21)$$

Wegen

$$a_{vv} = + \frac{1}{a_v(\eta_v)}, \quad a_{vn} = - \frac{a_n(\eta_v, 0)}{a_v(\eta_v)} \quad (\text{vgl. [15]})$$

$$\alpha_v = \alpha(\eta_v)$$

sind Gl. (20) und Gl. (21) identisch.

Im Sonderfall $h \rightarrow \infty$ geht das Gleichungssystem in

$$\alpha(\eta_v) = 2 \sum_{n=1}^m a_n(\eta_v, \zeta=0) \gamma_n \quad (22)$$

über, das bei konstantem α längs Spannweite eine elliptische γ -Verteilung als Lösung hat. Es handelt sich hierbei um die Lösung der von *R. T. Jones* [16] entwickelten Theorie schlanker Flügel (slender body theory). Das Gleichungssystem Gl. (20) führt auf Lösungen, die man als Erweiterungen der Lösung von *R. T. Jones* auf schlanke Flügel in Bodennähe auffassen kann.

Zu dem System Gl. (20) kann man daher auch durch folgende Überlegungen gelangen: Gesucht ist die Lösung der Differentialgleichung für das Störpotential $\Phi(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{am Flügel:} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\alpha U_\infty \quad (24)$$

$$\text{am Boden:} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 .$$

Dabei ist das Koordinatensystem $x = s\xi$, $y = s\eta$, $z = s\zeta$ mit $s = b/2$ nach Abb. 2 zugrunde gelegt. Aus der Lösung $\Phi(x, y, z)$ erhält man die Geschwindigkeiten in den Koordinatenrichtungen zu $U = U_\infty + (\partial\Phi/\partial x)$, $v = \partial\Phi/\partial y$, $w = \partial\Phi/\partial z$ und den dimensionslosen Druckkoeffizienten zu $c_p = (p - p_\infty)/q_\infty = -(2/U_\infty) (\partial\Phi/\partial x)$. Da es sich um schlanke Flügel handelt, kann das erste Glied der Differentialgleichung gegenüber den beiden übrigen vernachlässigt werden, und man erhält die bekannte Potentialgleichung für schlanke Flügel

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (25)$$

Für jede Ebene $x = \text{const.}$ ist die zweidimensionale Potentialgleichung (25) zu lösen. Wie in Abb. 4 skizziert, soll die Lösung so beschaffen sein, daß am Flügel die Abwärtsgeschwindigkeit $w = -\alpha U_\infty$ und am Boden $w = 0$ herrscht. Die Potentialfunktion $\Phi(x, z)$ macht an der Flügelfläche einen Sprung $\Phi_{ob} - \Phi_u$. Man kann nun in bekannter Weise das induzierte Geschwindigkeitsfeld dieser Lösung dadurch finden, daß man die Flügelbreite $2y_1$ mit einer kontinuierlichen Wirbelbelegung versieht. Aus der Bedingung, daß am Flügel konstanter Ab-

wind herrschen soll, erhält man eine Integralgleichung für die gesuchte Potentialdifferenz $g(\eta^*) = (\Phi_o - \Phi_u) / 2 y_1 U_\infty$ von der Form:

$$\alpha(\eta^*) U_\infty = -2 U_\infty \alpha_i(\eta^*, \zeta = 0) + 2 U_\infty \alpha_i\left(\eta^*, \zeta = \frac{2h}{y_1}\right), \quad (26)$$

wobei für $\alpha_i(\eta^*, \zeta)$ entsprechend Gl. (8)

$$\alpha_i(\eta^*, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g(\eta^{*'}) \frac{(\eta^* - \eta^{*'}) - \zeta^2}{[(\eta^* - \eta^{*'})^2 + \zeta^2]^2} d\eta^{*'} \quad (27)$$

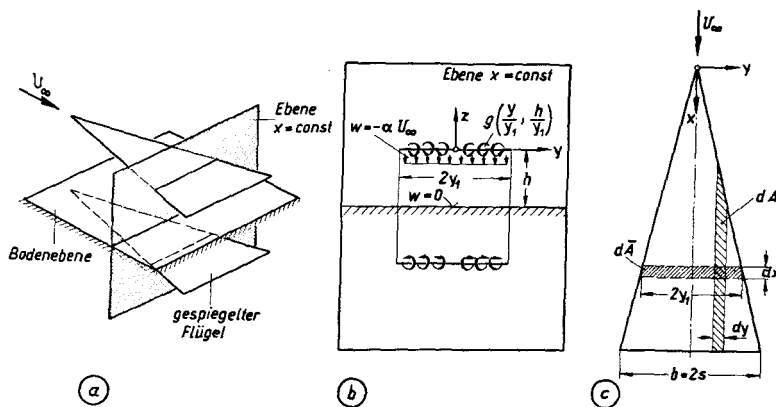


Bild 4: Zur Theorie schlanker Flügel (slender body theory) in Bodennähe.

- a) Räumliche Darstellung eines schlanken Flügels in Bodennähe
- b) Schnittebene $x = \text{const.}$
- c) Flügelgrundriß

gilt. Wegen der Quadraturformel Gl. (9) läßt sich diese Integralgleichung für $g(\eta^*)$ durch das folgende lineare Gleichungssystem für die m Unbekannten g_v

$$= g(\eta_v^*) \text{ mit } \eta_v^* = \frac{y_v}{y_1} = \cos \frac{v\pi}{m+1} \quad (v = 1, 2 \dots m)$$

$$\alpha_v = 2 \sum_{n=1}^m \left[a_n(\eta_v^*, \zeta = 0) - a_n\left(\eta_v^*, \zeta = \frac{2h}{y_1}\right) \right] g_v \quad (28)$$

ersetzen. Die Potentialdifferenz $g(\eta^*, h/y_1)$ hängt jetzt neben der Spannweitenkoordinate η^* auch noch von h/y_1 , dem Verhältnis von Bodenabstand zu örtlicher Spannweite, ab. In Abb. 5 ist für einige Verhältnisse h/y_1 diese Funktion $g(\eta^*, h/y_1)$ aufgetragen. Da das Verhältnis h/y_1 sich bei einem Flügel in Tiefenrichtung ändert, ergibt sich für die einzelnen Streifen der Tiefe dx (vgl. Abb. 4) kein ähnlicher Verlauf für das Potential und damit für die Druckverteilung über der Spannweite, wie das beim Flügel von kleinem Seitenverhältnis im unbegrenzten Raum der Fall ist. Die Strömung an einem Deltaflügel in Bodennähe ist daher nicht mehr kegelsymmetrisch!

Aus der Potentialdifferenz $g(\eta^*, h/y_1)$, die entweder aus der Integralgleichung (26) oder dem linearen Gleichungssystem (28) bestimmt werden kann,

errechnet sich die Druckdifferenz zwischen Flügeloberseite und Unterseite folgendermaßen:

$$\frac{p_u - p_{ob}}{q_\infty} = 4 \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\eta^*, \frac{h}{y_1} \right) \cdot y_1 \right] = 4 \frac{d y_1}{d x} \left[g - \eta^* \frac{\partial g}{\partial \eta^*} - \frac{h}{y_1} \frac{\partial g}{\partial \left(\frac{h}{y_1} \right)} \right]. \quad (29)$$

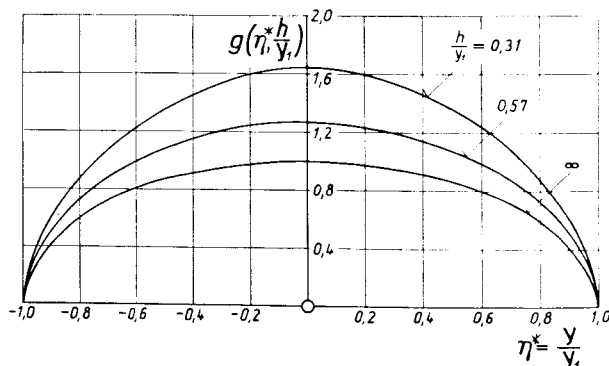


Bild 5. Verteilung der dimensionslosen Potentialdifferenz $g(\eta, h/y_1) = (\Phi_{ob} - \Phi_u) / 2y_1 U_\infty$ über der örtlichen Spannweite für verschiedene Verhältnisse h/y_1 nach der Theorie schlanker Flügel.

Man erhält das bekannte Ergebnis, daß nur dann eine Druckdifferenz am Flügel auftritt, wenn $dy_1/dx \neq 0$, d. h. wenn die Flügelbreite nach hinten zunimmt. Die Verteilung $(p_u - p_{ob})/q_\infty$ ist als Funktion von $\eta^* = y/y_1$ für einige Verhältnisse h/y_1 in Abb. 6 dargestellt. Eine Integration dieser Verteilung über

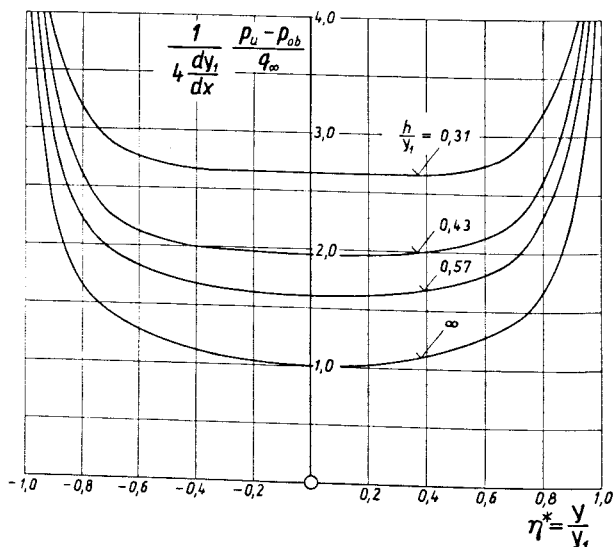


Bild 6. Druckverteilung über der örtlichen Spannweite für verschiedene Verhältnisse h/y_1 nach der Theorie schlanker Flügel

der örtlichen Spannweite $2y_1$ liefert dann die Auftriebskraft $d\bar{A}$ auf dem Streifen der Fläche $2y_1 dx$. Man erhält für einen entsprechend definierten örtlichen Auftriebsbeiwert:

$$\bar{c}_a = \frac{d\bar{A}}{q_\infty 2 y_1 dx} = 2 \pi \alpha \frac{dy_1}{dx} f_1\left(\frac{y_1}{h}\right). \quad (30)$$

Die Funktion $f_1(y_1/h)$ ist in Abb. 7 dargestellt. Die anschauliche Bedeutung dieser Funktion kann man aus Abb. 8 erkennen. Dort ist die Auftriebsverteilung

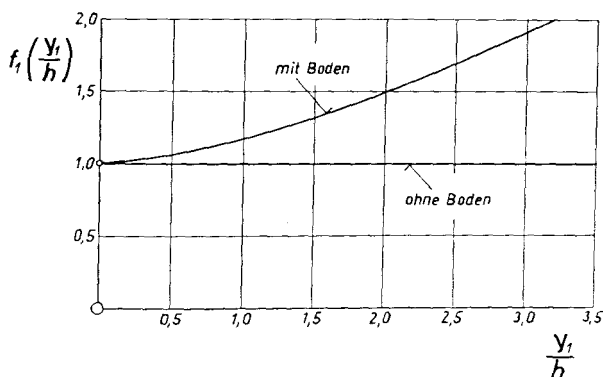


Bild 7. Funktion $f_1(y_1/h)$ nach Gl. (30) in Abhängigkeit vom Verhältnis y_1/h der örtlichen Halbspannweite zu Bodenabstand (Theorie schlanker Flügel)

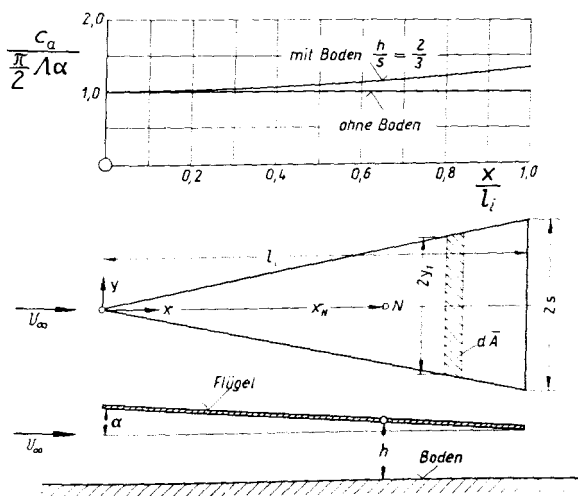


Bild 8. Auftriebsverteilung über der Tiefe für einen Deltaflügel mit dem Bodenabstand $h/s = 2/3$ (Theorie schlanker Flügel)

in Tiefenrichtung für einen Deltaflügel dargestellt, für den bekanntlich $A = 4$ (dy_1/dx) gilt. Man erhält also:

$$\frac{\bar{c}_a}{\frac{\pi}{2} A \alpha} = f_1\left(\frac{y_1}{h}\right). \quad (31)$$

Ohne Boden ergibt sich eine konstante Verteilung $\bar{c}_a = \frac{\pi}{2} A \alpha$, während mit Boden eine Zunahme des Auftriebsbeiwertes zur Flügelhinterkante erfolgt. Damit ist auch eine Rückverschiebung des aerodynamischen Neutralpunktes verbunden, d. h. der Boden hat einen stabilisierenden Einfluß auf den Flügel (vgl. auch Abschnitt 4.1). In dem gewählten Beispiel rückt der Neutralpunkt infolge der Bodennähe von $x_N/l_i = 0,667$ auf $x_N/l_i = 0,685$.

Zur Berechnung des Gesamtauftriebs eines Flügels geht man am besten von einer Aufteilung des Flügels in Streifen der Breite dy (vgl. Abb. 4c) aus. Die dazugehörige Auftriebskraft ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{dA}{q_\infty} &= \int_{x_v}^{x_h} \frac{p_u - p_{ob}}{q_\infty} dx dy = -\frac{2}{U_\infty} \int_{x_v}^{x_h} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_u - \Phi_{ob}) dx dy = \\ &= 4s^2 \int_{-1}^{+1} g(\eta', h/s) d\eta', \end{aligned} \quad (32)$$

wobei η' jetzt y'/s die mit der Halbspannweite des Flügels dimensionslos gemachte Koordinate ist. Die Verteilung der Potentialdifferenz $g(\eta, h/s)$ ist identisch mit der in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 benutzten Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta', h/s)$. Solche Verteilungen sind in Abb. 5 bereits wiedergegeben worden. Der Gesamtauftrieb folgt daraus zu

$$A = \int_{-s}^{+s} dA = 4s^2 q_\infty \int_{-1}^{+1} g(\eta', h/s) d\eta' \quad (33)$$

und der entsprechende Auftriebsbeiwert:

$$c_A(s/h) = A \int_{-1}^{+1} g(\eta', h/s) d\eta', \quad (34)$$

was identisch mit Gl. (13) ist. Abb. 9 zeigt die Abhängigkeit des daraus gewonnenen Auftriebsanstieges c_A' von dem Bodenabstandsverhältnis. Den Beiwert des Kippmomentes bestimmt man sich am einfachsten aus einer Auftragung c_a über der Flügeltiefe nach dem Vorbild von Abb. 8.

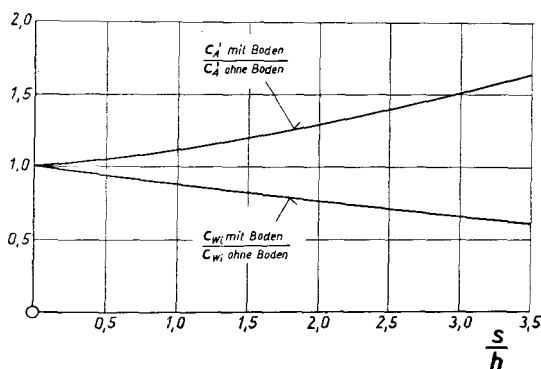


Bild 9. Bodeneffekt auf den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand bei konstantem Auftrieb in Abhängigkeit vom reziproken Bodenabstand nach der Theorie schlanker Flügel

2.5 Induzierter Widerstand

Hat man für einen vorgegebenen Tragflügel die Zirkulationsverteilung $\gamma(\eta)$ bzw. $g(\eta, h/s)$ berechnet, so kann man daraus den Beiwert für den induzierten Widerstand folgendermaßen ermitteln:

$$c_{Wi} = \frac{W_i}{q_\infty F} = A \int_{-1}^{+1} \gamma(\eta') (\alpha_i + \alpha_{is}) d\eta'. \quad (35)$$

Dabei sind α_i und α_{is} die induzierten Abwindwinkel des gegebenen bzw. gespiegelten Flügels nach Gl. (8). Sie sind beide proportional zur Zirkulationsverteilung γ , so daß c_{Wi} von $\gamma(\eta)$ quadratisch abhängt. Da andererseits der c_A -Wert nach Gl. (13) linear von γ abhängt, ergibt sich, daß der Ausdruck c_{Wi}/c_A^2 unabhängig von der Stärke der Zirkulationsverteilung, d. h. vom Auftrieb ist. Es gilt also:

$$\frac{c_{Wi}}{c_A^2} = \mathfrak{F}(\text{Form der Zirkulationsverteilung}, h/s). \quad (36)$$

Kennt man demnach die Form der Zirkulationsverteilung, so läßt sich ohne Kenntnis der Auftriebsverteilung zu jedem Bodenabstand h/s der Wert c_{Wi}/c_A^2 berechnen. Zu jedem Bodenabstand h/s gibt es eine bestimmte Form der Zirkulationsverteilung, die einen minimalen Wert c_{Wi}/c_A^2 liefert. Wie *M. Munk* (vgl. [3]) gezeigt hat, gehört diejenige Zirkulationsverteilung zu dem Minimalwert, die unendlich weit hinter dem Flügel konstante Abwindwinkelverteilung induziert, d. h. für die $\alpha_i + \alpha_{is}$ unabhängig von η ist. Wie im Abschnitt 2.4 gezeigt wurde, ergeben sich diese Zirkulationsverteilungen gerade bei Tragflügeln mit extrem kleinen Seitenverhältnissen. Diese Zirkulationsverteilungen sind in Abb. 5 dargestellt worden. Bei unendlich großem Bodenabstand liegt bekanntlich gerade elliptische Zirkulationsverteilung vor, und mit Annäherung an den Boden wachsen die Zirkulationswerte in der Flügelmitte stärker an als an den Flügelenden, so daß die Zirkulationsverteilung immer mehr die Form einer

Parabel annimmt. Im Grenzfall sehr kleinen Seitenverhältnisses haben also alle Tragflügel unabhängig vom Bodenabstand gerade immer diejenige Zirkulationsverteilung, die den geringsten induzierten Widerstand ergibt. In Abb. 9 ist das Verhältnis $c_{Wi}/(c_A^2/\pi A)$, das dem Minimalwert entspricht, in Abhängigkeit vom reziproken Höhenverhältnis s/h wiedergegeben. Mit Annäherung an den Boden nimmt bei gleichem Auftriebsbeiwert der Beiwert des induzierten Widerstandes beträchtlich ab. Wegen $\alpha_i + \alpha_{is} = \alpha/2$ folgt aus Gl. (34)

$$c_{Wi} = \frac{1}{2} \pi A \int_{-1}^{+1} \gamma d\eta' . \quad (37)$$

Unter Benutzung von Gl. (13) folgt daraus:

$$\frac{c_{Wi}}{c_A^2/\pi A} = \frac{\pi A}{2} \frac{\alpha}{c_A} = \frac{\pi A}{2} \frac{1}{d\alpha/dx} . \quad (38)$$

Es ergibt sich also, daß der Ausdruck c_{Wi}/c_A^2 umgekehrt proportional zum Auftriebsanstieg ist. Mit a. W., in demselben Maße wie der Auftriebsanstieg zunimmt, sinkt der induzierte Widerstand ab. Nimmt man für alle Bodenabstände elliptische Zirkulationsverteilung an, was immer durch geeignete Verwindung des Flügels möglich ist, so ergibt sich praktisch dieselbe Kurve wie für die optimale Zirkulationsverteilung. Die Form der Zirkulationsverteilung hat also sehr geringen Einfluß gegenüber dem Einfluß des Bodenabstandes, so daß die in Abb. 9 dargestellte Kurve $c_{Wi \text{ m. B. }} / c_{Wi0 \text{ B. }}$ mit sehr guter Näherung für alle Flügelformen benutzt werden kann.

3. Berechnungsbeispiele nach der Traglinientheorie

3.1 Einfluß des Bodenabstandes auf den Bodeneffekt

Nach dem im Abschnitt 2.2 erläuterten Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung in Bodennähe sind einige systematische Beispielrechnungen durchgeführt worden. Dabei wurden die Flügel jeweils in $m = 7$ Schnitte unterteilt. Abb. 10 zeigt für einen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $A = 3$ die

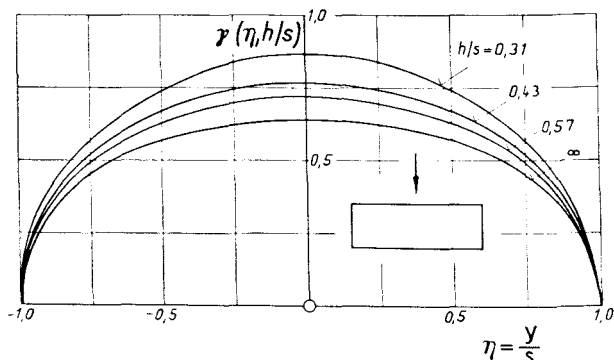


Bild 10. Zirkulationsverteilungen für einen Rechteckflügel mit dem Seitenverhältnis $A = 3$ bei verschiedenen Bodenabständen (Traglinientheorie)

Auftriebsverteilungen längs Spannweite für vier verschiedene Bodenabstände h/s . Man erkennt deutlich die Auftriebszunahme bei Annäherung an den Boden. Die Form der Verteilung dagegen bleibt praktisch ungeändert. Die daraus ermittelten Gesamtwerte für den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand sind in *Abb. 11* in Abhängigkeit vom reziproken Bodenabstand aufgetragen. Das Bild zeigt den für alle Flügelformen typischen Verlauf: Zunahme des Auftriebsanstieges und Abnahme des induzierten Widerstandes bei Annäherung an den Boden.

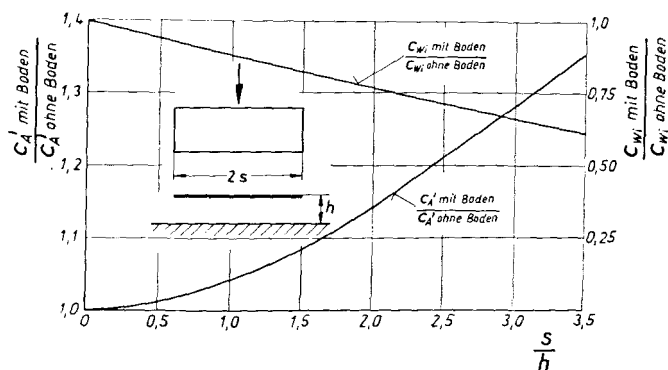


Bild 11. Bodeneffekt auf den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand bei konstantem Auftrieb in Abhängigkeit vom reziproken Bodenabstand für einen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\lambda = 3$ (Traglinientheorie)

3.2 Einfluß des Seitenverhältnisses auf den Bodeneffekt

Die Frage, wie sich bei festem Bodenabstand eines Flügels der Bodeneffekt mit Änderung des Seitenverhältnisses λ ändert, ist nicht eindeutig zu beantworten. Vielmehr hängt das Ergebnis davon ab, ob bei Änderung von λ das Verhältnis Bodenabstand zu Flügelhalbspannweite h/s oder das Verhältnis Bodenabstand zu mittlerer Flügeltiefe h/l_m festgehalten wird. In *Abb. 12* ist das Verhältnis der Auftriebsanstiege und der induzierten Widerstände ($c_A = \text{const.}$) für Rechteckflügel mit Boden und ohne Boden in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis λ aufgetragen. Dabei wurde das Verhältnis $h/s = 0,31$ festgehalten. Mit abnehmendem Seitenverhältnis wird der Bodeneffekt immer größer und mündet für $\lambda = 0$ in die Werte der Theorie schlanker Körper nach *Abb. 9* ein.

In *Abb. 13* ist der andere Fall dargestellt, bei dem das Seitenverhältnis der Rechteckflügel bei festgehaltenem $h/l = 0,465$ verändert wurde. Hier zeigt sich die umgekehrte Tendenz, nämlich kleiner Bodeneffekt bei kleinem Seitenverhältnis und großer Bodeneffekt bei großem Seitenverhältnis. Interessant ist, daß bei einem Seitenverhältnis von etwa $\lambda = 5$ der Auftriebsanstieg den maximalen Bodeneffekt erfährt, der sogar noch größer ist als der Bodeneffekt bei unendlicher Spannweite. In *Abb. 13* sind außerdem noch die entsprechenden Kurven für eine Serie von Deltaflügeln mit einem Zuspitzungsverhältnis von $\lambda = 1/8$ wiedergegeben. Bei Änderung des Seitenverhältnisses λ wurde das

Verhältnis $h/l_\mu = 0,56$ konstant gehalten. Es ergibt sich im wesentlichen der gleiche Verlauf wie beim Rechteckflügel, nur sind die Effekte infolge der Pfeilung im ganzen etwas geringer. Für großes Seitenverhältnis geht die Kurve für den Auftriebsanstieg des Rechteckflügels in den entsprechenden Wert des ebenen Problems nach Bild 3 über.

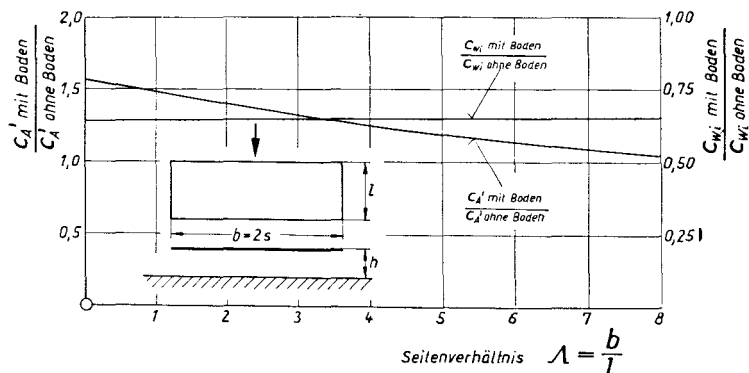


Bild 12. Bodeneffekt auf den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand bei konstantem Auftrieb in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis λ für Rechteckflügel. Die Variation des Seitenverhältnisses erfolgt bei festem Verhältnis von Bodenabstand zu Halbspannweite $h/s = 0,31$ (Traglinientheorie)

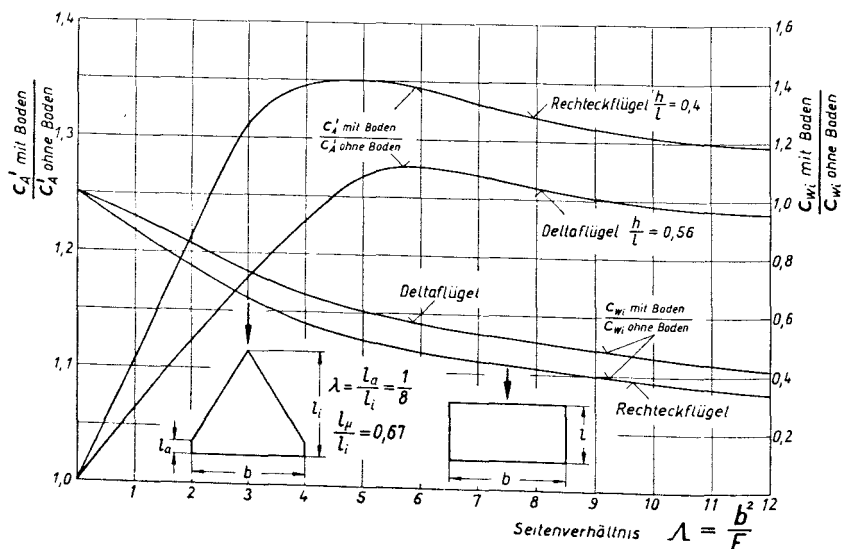


Bild 13. Bodeneffekt auf den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand bei konstantem Auftrieb in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis λ für Rechteckflügel ($\lambda = l_a/l_i = 1$) und Deltaflügel ($\lambda = 1/8$). Die Variation des Seitenverhältnisses erfolgt bei festem Verhältnis von Bodenabstand zu mittlerer Flügeltiefe. Rechteckflügel: $h/l = 0,47$; Deltaflügel: $h/l = 0,56$ (Traglinientheorie).

3.3 Einfluß der Pfeilung auf den Bodeneffekt

Für einen Flügel vom Seitenverhältnis $\lambda = 3$ und konstanter Flügeltiefe längs Spannweite wurde der Bodeneffekt bei konstantem Bodenabstand h/s , aber Änderung des Pfeilwinkels φ untersucht. Die Ergebnisse in Abb. 14 zeigen eine sehr starke Abnahme des Bodeneffektes infolge Pfeilung, was auch von Meßergebnissen her bekannt ist [12].

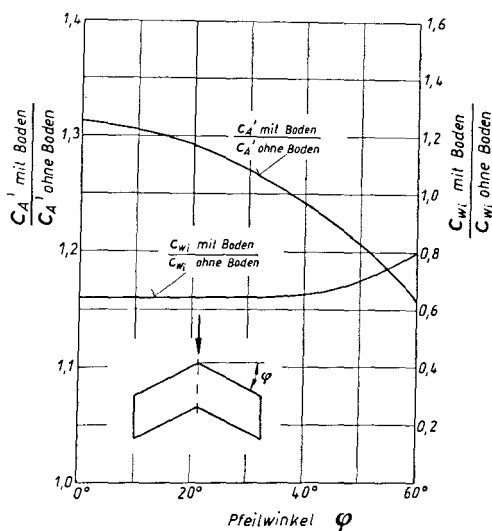


Bild 14. Bodeneffekt auf den Auftriebsanstieg und den induzierten Widerstand bei konstantem Auftrieb in Abhängigkeit vom Pfeilwinkel φ für Pfeilflügel vom Seitenverhältnis $\lambda = 3$ und konstanter Flügeltiefe ($\lambda = 1$) bei festem Bodenabstand $h/s = 0,31$ (Traglinientheorie).

4. Berechnungsbeispiele nach der Tragflächentheorie

4.1 Bodeneinfluß auf den aerodynamischen Neutralpunkt

Für einen Deltaflügel vom Seitenverhältnis $\lambda = 2,33$ und dem Zuspitzungsverhältnis $\lambda = l_a/l_i = 0,125$ wurden Auftriebsverteilungen für verschiedene Bodenabstände nach dem in Abschnitt 2.3 erläuterten Tragflächenverfahren berechnet. Dabei wurde der Flügel in $m = 15$ Schnitte längs Spannweite unterteilt. Die Werte für die Verhältnisse $\left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{m. B.} / \left(\frac{dc_A}{d\alpha}\right)_{o. B.}$ ergaben sich in sehr guter Übereinstimmung mit den entsprechenden Zahlenwerten nach der Traglinientheorie, was eine gute Bestätigung für die Brauchbarkeit des Traglinienverfahrens darstellt. Für die Verschiebung des aerodynamischen Neutralpunktes bei Annäherung an den Boden ergab sich der Verlauf in Abb. 15. Der Neutralpunkt wird etwas nach hinten verlagert. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen in Abb. 8 wirkt die Bodennähe stabilisierend auf den Flügel. Die Meßergebnisse in Abb. 15 nach [11] deuten diese Tendenz ebenfalls an. Die Verlagerung des Neutralpunktes ist jedoch im ganzen sehr gering.

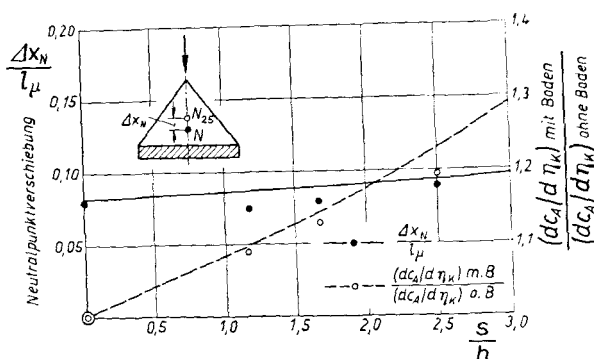


Bild 15. Bodeneffekt auf die Neutralpunktverschiebung und die Klappenwirksamkeit $dc_A/d\eta_K$ in Abhängigkeit vom reziproken Bodenabstand für einen Deltaflügel mit Klappe ($A = 2,33$; $\lambda = 1/8$, $l_K/l_i = 1/8$). Theorie nach Tragflächenverfahren; Messung nach [11].

4.2 Bodeneinfluß auf die Klappenwirksamkeit

Mit Hilfe des Tragflächenverfahrens lassen sich auch Flügel mit Klappen behandeln [17]. Für den gleichen Deltaflügel aus Abschnitt 4.1 wurde für eine über der ganzen Spannweite erstreckte Klappe der Tiefe $l_K = l_a$ mit dem Klappenausschlag η_K eine Auftriebsrechnung mit Boden und ohne Boden durchgeführt. Daraus ergab sich der in Abb. 15 dargestellte Verlauf von

$$\left(\frac{\partial c_A}{\partial \eta_K} \right)_{m. B.} / \left(\frac{\partial c_A}{\partial \eta_K} \right)_{o. B.} \quad \text{in Abhängigkeit vom Bodenabstand. Der Einfluß des}$$

Bodens ist recht beträchtlich, und die theoretische Kurve gibt die Messungen nach [11] ganz gut wieder.

5. Zusammenfassung

Es wird gezeigt, in welcher Weise die bekannten Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung an Tragflügeln im unbegrenzten Raum für die Behandlung von Tragflügeln in Bodennähe erweitert werden können. Diese Erweiterung ist unter Verwendung des Spiegelungsprinzips möglich, wenn man sich auf sehr kleine Anstellwinkel beschränkt (lineare Theorie). Es stellt sich heraus, daß die einfache Prandtl'sche Traglinientheorie in Bodennähe versagt. Bei nicht zu kleinen Bodenabständen liefert die erweiterte Traglinientheorie, bei welcher die kinematische Strömungsbedingung auf der $3/4$ l -Linie erfüllt wird, gute Ergebnisse. Für genauere Rechnungen, insbesondere für die Bestimmung des aerodynamischen Neutralpunktes bzw. der Klappenwirksamkeit in Bodennähe, muß die Tragflächentheorie herangezogen werden. Dabei genügt es jedoch, den gespiegelten Flügel durch eine tragende Linie zu ersetzen.

Der Bodeneffekt bewirkt stets eine Zunahme des Auftriebsanstieges dc_A/da und eine Abnahme des induzierten Widerstandes c_{Wi} bei konstantem Auftrieb. Systematische Beispielrechnungen zeigen den Einfluß von Bodenabstand, Seitenverhältnis und Pfeilung auf den Bodeneffekt. Ferner sind erstmalig Berechnungen des aerodynamischen Neutralpunktes und der aerodynamischen Beiwerte von Klappenflügeln in Bodennähe ausgeführt worden.

6. Literatur

- [1] *H. Schlichting, E. Truckenbrodt*: Aerodynamik des Flugzeuges, Springer Berlin, Bd. I. 1959. Bd. II. 1960.
- [2] *C. Wieselsberger*: Über den Flügelwiderstand in der Nähe des Bodens. ZFM 12 (1921), 145—154; vgl. auch NACA TM 77. (1922)
- [3] *P. de Haller*: La portance et la traînée induite minimum d'une aile au voisinage du sol. Mitteilg. Nr. 4/5 a. d. Inst. f. Aerodynamik der ETH Zürich (1936).
- [4] *S. Tomotika, I. Imai*: The moment of the fluid pressure acting on a flat plate in a semi-infinite stream bounded by a plane wall. I. Case of low boundary (the ground effect) Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., No. 152 (1937).
- [5] *I. Tani, M. Taima, S. Simidu*: The effect of ground on the aerodynamic characteristics of a monoplane wing. Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., No. 156 (1937).
- [6] *S. Tomotika, Z. Hasimoto, K. Urano*: The forces acting on an aerofoil of approximate Joukowski type in a stream bounded by a plane wall. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 4 (1951), 289—307.
- [7] *Y. Hamal*: Modification des propriétés aérodynamiques d'une aile au voisinage du sol. Mem. No. 4 (1953), Société Royal Belge des Ing. et des Industriels.
- [8] *G. C. Furlong, T. V. Bollech*: Effect of ground-interference on the aerodynamic and flow characteristics of 42° sweptback wing at Reynolds numbers up to $6,8 \times 10^6$ NACA-Report No. 1218 (1955).
- [9] *R. M. Licher*: Increase in lift for two- and three-dimensional wings near the ground. Douglas Santa Monica Div., Report SM-22615 (1956).
- [10] *D. A. Buell, B. E. Tinling*: Ground effects on the longitudinal characteristics of two models with wings having low aspect ratio and pointed tips. NACA TN 4044 (1957).
- [11] *F. Thomas*: Aerodynamische Eigenschaften von Pfeil- und Deltaflügeln in Bodennähe. Jahrbuch der Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1958, 53—61.
- [12] *M. N. Wood, W. J. G. Trebble*: Low speed tunnel measurements of ground effect on a $1/5$ th scale model of the Swift. ARC CP 458 (1959).
- [13] *E. Truckenbrodt*: Beiträge zur erweiterten Traglinientheorie. Z. Flugwiss. 1 (1953), 31—37.
- [14] *K. Gersten*: Über die Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes von Tragflügeln. Jahrbuch 1957 d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt, S. 172—190.
- [15] *E. Truckenbrodt*: Tragflächentheorie bei inkompressibler Strömung. Jahrbuch 1953 d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt, S. 40—65.
- [16] *R. T. Jones*: Properties of low-aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound. NACA-Report No. 835 (1946).
- [17] *E. Truckenbrodt, K. H. Gronau*: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Deltaflügeln mit Klappen bei inkompressibler Strömung. Z. Flugwiss. 4 (1956), 236—246.